

「計算誤差」について

平成 20 年 4 月 20 日

寶 馨

3 月 11 日に提示された意見（案）において「計算誤差」という用語を含む文章があり、これについて適切な表現を考えるよう、4 月 9 日の委員会にて委員長よりご指示がありました。その後私なりに検討しておりましたところ、15 日に 4 月 22 日版の意見書（案）が作成され送付されて参りました。そこにも「計算誤差」を含む文章が残っています。

この用語法とそれに関連する事柄について、委員各位にもご理解いただきやすいようにとりまとめ、以下に検討結果として回答いたします。

1. 「計算誤差」という言葉を使う場面

事実や現象を数式（数学モデル）で記述し、計算機を使って答えを求めるとき、計算結果がその数式で表現された事実や現象になるべく近くなるように工夫します。

(1) わかりやすい例

円の面積は（半径）×（半径）×（円周率 π ）です。半径が与えられて、その面積を求めるときに円周率 π を使います。この円周率は、小学校では、3.14 と習います。さらに正確には上位 10 桁までとると $\pi=3, 1415926535$ です。

上一桁とって $\pi=3$ とすれば誤差はかなりあり、二桁の $\pi=3.1$ ですとまだ過小評価です。 $\pi=3.14$ でもまだ、真値よりはほんの少しだけ小さいのですが、このときの「計算誤差」は、約 0.0005（すなわち 0.05 パーセント）であり、ほとんどゼロに近いと言えます。

ちなみに、 $\pi=3.14$ の計算結果を正解だと近似すると、上記の $\pi=3$ を使った場合の計算誤差は $0.14 \div 3.14 = 0.0456$ すなわち約 4.56 パーセント、 $\pi=3.1$ を使えば、 $0.04 \div 3.14 = 0.0127$ で計算誤差は約 1.27 パーセントであるということになります。もう少しわかりやすい例として半径 10 m の円の面積を考えますと、 $10 \times 10 \times 3.14 = 314 \text{ m}^2$ 、 $\pi=3$ を使った場合は 300 m^2 で 14 m^2 の誤差を考えることとなります。もし、 1 m^2 あたりの地価が 100 万円だとするとこの誤差は 1,400 万円に相当することになり、計算誤差と言って済ませられないでしょう。

なお、計算誤差の種類としては、丸め誤差、打ち切り誤差、情報落ち、桁落ちなどがあり、上記の誤差は、丸め誤差に相当します。

(2) 河川の水位・流量計算の例

河川の流れという現象を数学モデル（微分方程式系）で記述し、コンピュータを使って水位や流量の答えを求めるとき、計算結果がそのモデルの正解（正しい答え）になるべく近くなるように工夫します。すなわち、計算時間間隔 Δt や空間差分間隔 Δx 、 Δy 、 Δz を適切に選んで、モデルで表現された現象（正解）と計算結果の差をなるべく小さくします。上の円の面

積と同じように、この差を「計算誤差」といいます。

河川の流れの追跡計算では、この空間差分間隔

Δx (上流から下流への距離方向の差分間隔)

Δy (水深方向の差分間隔)

Δz (河川横断方向の差分間隔)

となります。

同じ計算時間間隔 Δt に対して、これらの間隔が粗いと計算誤差（上記の丸め誤差、打ち切り誤差、情報落ち、桁落ちなど）は大きくなり、これらの間隔を小さくしていくと計算誤差は小さくなります。

「計算誤差」という言葉は、通常、このように計算技術上の条件によって発生する誤差のことを言うのであり、モデルによって表現される現象を正確に計算する場合は、「計算誤差」がゼロに近いものとなっていなければなりません。したがって、「〇〇は計算誤差の範囲」という表現は、数値計算をする研究者や技術者は、皆、首をかしげるはずで

なお、ダムがある場合とダムがない場合のどちらにおいても、流量や水位の計算値は、上記の計算誤差を排除してモデルによって計算された値であり、4月22日版の意見（案）に記述のある水位低下高 19 cm（大戸川ダムの効果）や 20 cm（川上ダムの効果）という数値には計算誤差は含まれていないことになります。

2. 初期条件や境界条件の違いによって発生する差異

計算しようとする範囲（河道区間）の初期条件や境界条件（上流端の流量や下流端の水位）の与え方によって、異なる計算結果が出ます。これは、「計算誤差」とは言いません。初期条件や境界条件の与え方の違いによって発生する差（あるいは「差異」）です。

3. モデル誤差と観測誤差

(1) モデル誤差

実際の現象を数学モデルで記述するとき、モデル化することによる誤差があります。物体が空中を落下するというような単純な現象は、古典的な物理学（ニュートン力学）でほぼ完全に記述でき、そのモデル誤差は極めて小さいと言えます。

河川の洪水のような現象は、複雑であり変動も大きく、モデル誤差はかなり大きいと言えます。何パーセントとは一概に言えません。用いるモデル（1次元解析や2次元解析、不等流モデル、不定流モデルの別）にもよりますし、モデルに使われている定数（粗度係数など）や河川の断面形状をどう仮定するかにも依存します。上記2.の初期条件や境界条件の与え方も関係してきます。

モデルを決めたとき、その定数などの選択は、過去の洪水を再現計算してみても観測

値を良く再現するものを使っているはずで、定数をうまく調整してやることにより、洪水ピークの観測値との差を限りなくゼロに近づけることができます。

ただし、同じモデル定数の組み合わせがどの洪水に対してもピーク時の観測値を再現できるか、と言えそうではありません。大きな洪水用のモデル定数と中小洪水用のモデル定数とは、それぞれ異なる値を用いなければそれぞれのピークを表現できないことがあります。たとえば、大きな洪水が来てそのあと直ぐに小さな洪水が来るようないわゆる二山洪水の場合、最初の大きな洪水ピークは再現できてその後の小さい洪水ピークは十分に再現できないということも経験します。これは、モデルが不十分であり、洪水中に起こる河床や河岸の変化、流れの渦、流木や土砂などの影響を十分に表現できないことなどによります。

このような観測値と計算値の誤差のことを、上記 1. の「計算誤差」と混同しないために、「モデル誤差」あるいは「シミュレーション誤差」などと呼びます。

なお、「モデル誤差」あるいは「シミュレーション誤差」の代わりに「観測値に対するモデル計算の誤差」、「観測値に対する再現（予測）計算の誤差」という表現は可能であり、このことを大雑把に「計算誤差」と混同して用いることも時にあるようです。

意見書（案）で記述されている「計算誤差」は、このような用例を意識してのことかも知れませんが、上述 1. の「計算誤差」とは区別すべきものです。

（２）観測誤差（測定誤差）

洪水流量の観測（測定）は危険で技術的にも難しく、観測誤差（測定誤差）は 1 割から 2 割程度あると見て良いと言えます。洪水の最中に水面が大きく変動するということから理解できるかと思えます。このような観測値に計算値がちゃんと合うかどうか、ということは専門家の間でもいつも議論になるところです。モデル誤差と観測誤差の区別が実際にはしにくいのです。したがって、「観測値に合いすぎるモデルはかえって疑え」という言葉があるぐらいです。

というようなことで、上記の水位低下高 19 cm や 20 cm は、「洪水時の水位の変動幅やモデル誤差の範囲内」という言い方はできなくもありません。

4. 水位低下高 19 cm や 20 cm は『極めて小さい』のか

しかしながら、はたして淀川本川における水位低下高 19 cm や 20 cm は『極めて小さい』のでしょうか。この水位低下高は流量にすれば数百 m^3/s に相当するとのことですので「決して小さいとは言えない」というのが河川計画の観点からの私の見解です。

その理由は、以下のようです。

- （１）この数百 m^3/s を淀川本川（枚方地点）の計画高水流量 12,000 m^3/s と比べれば、数値の割合としては小さい。400 m^3/s だとすれば 4%以下であり、500 m^3/s で 4%強、600 m^3/s だとしても 5%である。ただし、これを枚方地点だけで見て判断するのは早計である。「河川」を考えていることにならない。

- (2) すなわち、この流量低減分（水位低下分）は、関連する川筋の上（かみ）の方から流れ下ってきているものであり、上の方ではこの流量は決して小さくないからである。ちなみに、宇治川（宇治地点）で $1,500 \text{ m}^3/\text{s}$ 、木津川筋だと島ヶ原で $3,700 \text{ m}^3/\text{s}$ 、加茂で $6,200 \text{ m}^3/\text{s}$ であり、 $400 \text{ m}^3/\text{s}$ ～ $600 \text{ m}^3/\text{s}$ という値が決して小さいものではないことがわかる。
- (3) 水位の観点からしても、枚方では 19 cm や 20 cm でも、河道断面（川幅）の小さい中上流部の地点ではもっと大きな水位差になるはずである。
- (4) このように水が河川を上から下（しも）まで流れ下っていることを考える必要があり、淀川本川の部分のみを見て、『極めて小さい』と結論づけるのは、河川計画の観点から不適切であると考ええる。

1. (1) で円形の土地面積の例を示しました。 314 m^2 のうちの 14 m^2 であっても、 1 m^2 の単価が 100 万円であれば、1,400 万円もの大金に相当します。これと同じように、河川における数百 m^3/s の流量の意味を考えなければならぬのでありまして、『極めて小さい』などとは決して言えないのです。

5. 結 論

以上の考察により、4月22日版の意見（案）における関連部分の記述：

- ・ 『・・・この大戸川ダムによる水位低下高は、計算誤差の範囲であり極めて小さい。』（4頁）
 - ・ 『戦後最大洪水に対して、上野地区の河道改修および上野遊水地周囲堤締め切りによる流量増 $200 \text{ m}^3/\text{s}$ （八幡地点でのHWL超過高は 16 cm ）であり、計算誤差の範囲であり極めて小さい。』（4～5頁）
 - ・ 『・・・この川上ダムによる水位低下高は、計算誤差の範囲であり極めて小さい。』（5頁）
- という表現は不適切であると考えますので、ここに修正をお願いする次第です。

『計算誤差の範囲であり極めて小さい』と言おうとすることに無理、表現上の苦しさがあると言えます。直すとすれば、

- ・ 『・・・この大戸川ダムによる水位低下高は、流量で言えば $\text{〇〇m}^3/\text{s}$ に相当する。』（4頁）
- ・ 『戦後最大洪水に対して、上野地区の河道改修および上野遊水地周囲堤締め切りによる流量増 $200 \text{ m}^3/\text{s}$ （八幡地点でのHWL超過高は 16cm ）である。』（4～5頁）
- ・ 『・・・この川上ダムによる水位低下高は、流量で言えば $\text{〇〇m}^3/\text{s}$ に相当する。』（5頁）

で如何でしょうか。この水位低下高やそれに相当する流量の値を大きいと見るか、小さいと見るかは、それを読む人に委ねれば良いと思います。

河川や河川計画に携わったことのない人にとっては小さいと思われるかもしれませんが、我々淀川水系流域委員会のメンバーにとっては『極めて小さい』とは決して言えない値のはずです。

(以上)